AP M1 SUITES 20/09.

EXERCICE 1

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n + 8 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Méthode 1

a) Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n + 2$

$$\begin{cases} v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = 5u_n + 8 + 2 = 5u_n + 10 = 5(u_n + 2) = 5v_n \\ v_0 = u_0 + 2 = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de premier terme 3 et de raison 5. D'où $v_n = 3 \times 5^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) On sait que $v_n = u_n + 2$ donc $u_n = v_n - 2$

$$u_n = 3 \times 5^n - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Méthode 2

On raisonne par récurrence sur l'entier naturel n

On pose P_n : « $u_n = 3 \times 5^n - 2$ »

Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie pour $n = 0$.

$u_0 = 3 \times 5^0 - 2 = 3 - 2 = 1$ donc P_0 est VRAIE.

Hérédité : Soit k un entier naturel ; on suppose que $P(k)$ est vraie.

On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie.

On sait que $u_{k+1} = 5u_k + 8$

donc $u_{k+1} = 5 \times (3 \times 5^k - 2) + 8$ (car $P(k)$ est vraie)

$u_{k+1} = 5 \times 3 \times 5^k - 5 \times 2 + 8$

$u_{k+1} = 3 \times 5^{k+1} - 2$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n = 3 \times 5^n - 2$.

EXERCICE 2 (Amérique du Sud 2014)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Partie A : Conjecture

1. $u_1 = -\dfrac{1}{2}u_0^2 + 3u_0 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}2^2 + 3\times 2 - \dfrac{3}{2} = -2 + 6 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

   $u_2 = -\dfrac{1}{2}u_1^2 + 3u_1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 3\times\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{25}{8} + \dfrac{15}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{23}{8}$

2. En programmant à la calculatrice la fonction f définie par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - \dfrac{3}{2}$, on obtient :

   $u_3 = f(u_2) = f\left(\dfrac{23}{8}\right) = \dfrac{383}{128} \approx 2{,}992\,19$ et $u_4 = f(u_3) = f\left(\dfrac{383}{128}\right) \approx 2{,}999\,97$

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 3.

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1. $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{3}{2} - 3 = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2}$

   $v_n^2 = (u_n - 3)^2 = u_n^2 - 6u_n + 9$ donc $-\dfrac{1}{2}v_n^2 = -\dfrac{1}{2}\left(u_n^2 - 6u_n + 9\right) = -\dfrac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \dfrac{9}{2} = v_{n+1}$

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n^2$.

2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

   - $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$ donc $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$; la propriété est vraie au rang 0.
   - Supposons la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $-1 \leqslant v_p \leqslant 0$.

     On sait que, pour tout p, $v_{p+1} = -\dfrac{1}{2}v_p^2$.

     $-1 \leqslant v_p \leqslant 0 \Longrightarrow 0 \leqslant v_p^2 \leqslant 1 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant -\dfrac{1}{2}v_p^2 \leqslant 0 \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$

     Donc $-1 \leqslant v_{p+1} \leqslant 0$ et donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
   - La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$

3. **a.** Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right)$

   b. Pour tout n, $v_n \leqslant 0$ donc $-v_n \geqslant 0$.

   Pour tout n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$ donc $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n \leqslant 0$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n + 1 \leqslant 1$; donc $\dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0$.

   $$\left.\begin{array}{l} -v_n \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}v_n + 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow -v_n\left(\dfrac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0 \iff v_{n+1} - v_n \geqslant 0$$

   Pour tout n, $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, donc la suite (v_n) est croissante.