TS 06/12/16

CORRIGÉ

AP1 Loi binomiale

Exercice 1 → CALCULATRICE

Soit $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 15 et 0,35. C'est à dire : $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(15;0{,}35)$

Déterminer la valeur exacte, puis la valeur arrondie au millième des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=7)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=9)$

Correction 1

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5) = \binom{15}{5}\cdot 0{,}35^5\cdot(1-0{,}35)^{10}$

$= 3003\times 0{,}35^5\times 0{,}65^{10} \simeq 0{,}212$

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=7) = \binom{15}{7}\cdot 0{,}35^7\cdot(1-0{,}35)^{8}$

$= 6435\times 0{,}35^7\times 0{,}65^{8} \simeq 0{,}132$

c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5) = \binom{15}{5}\cdot 0{,}35^9\cdot(1-0{,}35)^{6}$

$= 5005\times 0{,}35^9\times 0{,}65^{6} \simeq 0{,}030$

Exercice 2

Lors d'une épidémie chez des bovins, un test de cette maladie est mis en place. Une étude est faite sur ce troupeau et la probabilité que le test soit positif sur un animal de ce troupeau est de 0,058.

On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$?
2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ? On donnera la valeur exacte et la valeur approchée au millième.

Correction 2

1. Le choix des cinq animaux est considéré comme des épreuves indépendantes entre elle et sont assimilés à des tirages avec remise. Ainsi, on est dans le cas d'un répétition de cinq fois une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,058

   La variable aléatoire $\mathcal{X}$ compte le nombre d'animaux ayant un test positif. Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre 5 et 0,058 :
   $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(5;0{,}058)$.

2. Les deux évènements $\{\mathcal{X}<1\}$ et $\{\mathcal{X}\geqslant 1\}$ sont complémentaires :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 1) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}<1) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$

   $= 1-\binom{5}{0}\times 0{,}058^0\times 0{,}942^5 = 1-0{,}942^5 \simeq 0{,}258$

Exercice 3

Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

Déterminer la probabilité exacte pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie, puis sa valeur arrondie au dixième.

Correction 3

La probabilité de perdre est de $\frac{1}{6}$.

Une partie étant constituée de 5 répétitions d'une même épreuve de manière indépendante, en notant $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de lancers perdant, on obtient une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre 5 et $\frac{1}{6}$: $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}\left(5;\frac{1}{6}\right)$.

La probabilité que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est donnée par la formule :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=3) = \binom{5}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{6}\right)^{5-3}$$

$$= 10\times\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^2 \simeq 0{,}032 \simeq 0{,}03$$

Exercice 4

Un concours sportif est organisé, chaque année, pour relier deux villages le plus rapidement possible. Plusieurs moyens de déplacement sont possibles :

à vélo ; en roller ; à pied.

On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres. L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$.

Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent "*non cycliste*". Donner également la valeur approchée au millième de cette probabilité.

Correction 4

En admettant que les résultats des différentes années sont indépendantes les unes des autres où la probabilité que le gagnant soit "*non-cycliste*" est de $\frac{1}{3}$.

On se place dans une situation de répétition d'épreuve de Bernoulli. Ainsi, en notant $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant sur six années le nombre de gagnant "*non-cycliste*", cette variable aléatoire suit une loi de binomiale de paramètre 6 et $\frac{1}{3}$:

$$\mathcal{X}\sim\mathcal{B}\left(6;\frac{1}{3}\right)$$

Ainsi, l'évènement "*l'épreuve est remportée au moins une fois par un concurrent non-cycliste*" se traduit par l'ensemble $\{\mathcal{X}\geqslant 1\}$.

De plus, les évènements $\{\mathcal{X}<1\}$ et $\{\mathcal{X}\geqslant 1\}$ sont complémentaires. On en déduit :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 1) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}<1) = 1-\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$$

$$= 1-\binom{6}{0}\times\left(\frac{1}{3}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^6 = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^6 \simeq 0{,}912$$

Exercice 5

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (*A, B et C*), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot "*BBAAC*" signifie que le candidat a répondu *B* qux première et deuxième questions, *A* aux troisième et quatrième questions et *C* à la cinquième question.

1. Combien y-a-t-il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?
2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

   Calculer la probabilité des évènements suivants :

   a. E : "*le candidat a exactement une réponse exacte*".

   b. F : "*le candidat n'a aucune réponse exacte*".

   c. G : "*le mot-réponse du candidat est un palindrome*". *(On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, "BACAB" est un palindrome)*

Correction 5

1. Le choix des réponses dans ce questionnaire correspond à un tirage avec remise à cinq tirages à trois choix.

   Ainsi, le nombre de réponses possibles sont au nombre de :

   $3^5 = 243$

2. Répondant au hasard aux questions, la probabilité de répondre correctement à une réponse est de :
   $\frac{1}{3}$

   C'est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

   Répétant cela, de manière indépendante, sur les cinq questions, on est face à un schéma de 5 épreuves de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.

   Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associant à chaque expérience, le nombre de bonnes réponses. La variable $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $\left(5;\frac{1}{3}\right)$.

   Ainsi, on a les probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=1) = \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4$

   $= 3\times\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

   b. $\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(\mathcal{X}=0) = \binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

   c. Pour créer un tel palindrome, il suffit de choisir les trois premières lettres : les deux dernières sont alors imposées par les deux premières.
   Ainsi, le nombre de palindromes dépend du nombre de possibilités sur les trois premières lettres :
   3^3
   Ainsi, on a la probabilité suivante :
   $\mathcal{P}(G) = \frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Exercice 6

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude. Soit $\mathcal{X}_i$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ième trajet et la valeur 0 sinon. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire définie par :

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2+\mathcal{X}_3+\cdots+\mathcal{X}_{40}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.
2. Dans cette partie, on suppose que $p=\frac{1}{20}$.

   a. Calculer l'espérance mathématiques de $\mathcal{X}$.

   b. Calculer les probabilités :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$

   c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur. Justifier l'égalité :
   $\mathcal{Z} = 400-100\cdot\mathcal{X}$,
   puis calculer l'espérance de $\mathcal{Z}$ pour $p=\frac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse ~~au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %~~. contraire de "au plus 2 contrôl

   a. Démontrer que :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) = (1-p)^{38}\cdot(741\cdot p^2+38\cdot p+1)$

   b. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par :
   $f(x) = (1-x)^{38}\cdot(741\cdot x^2+38\cdot x+1)$
   Montrer que f est strictement décroissante sur $[0;1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0;1]$ tel que :
   ~~$f(x_0) = 0{,}01$~~
   Déterminer l'entier naturel n tel que :
   $\frac{n}{100} < x_0 < \frac{n+1}{100}$

   c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %. *(On* *exprimera p en fonction de x_0)*

Correction 6

1. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ est la somme des variables aléatoires $\mathcal{X}_i$; elle compte donc le nombre de fois où Claude est contrôlé.

Ainsi, la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètre 40 et p.

2. a. La variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale, l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ vaut :

$$E(\mathcal{X}) = n\cdot p = 40\times\frac{1}{20} = 2$$

b. On a les probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0) = \binom{40}{0}\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^0\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^{40} \simeq 0{,}1285$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1) = \binom{40}{1}\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^{39} \simeq 0{,}2706$
- $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2) = \binom{40}{2}\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^2\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^{38} \simeq 0{,}2777$

c. La probabilité pour que Claude soit contrôl'e au plus deux fois se traduit par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant2) = \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1)+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2) = 0{,}1285+0{,}2706+0{,}2777 \simeq 0{,}6768$$

3. Déterminons l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{Z}$:

$$E(\mathcal{Z}) = E(400-100\cdot\mathcal{X})$$

D'après les propriétés de l'espérance :

$$= 400-100\cdot E(\mathcal{X})$$

D'après les propriétés de l'espérance :

$$= 400-100\cdot\left(40\times\frac{1}{5}\right)$$
$$= 400-800$$
$$= -400$$

4. a. En reprenant la question précédente :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant2) = \mathcal{P}(\mathcal{X}{=}0)+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}1)+\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}2)$$
$$= \binom{40}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^{40}+\binom{40}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^{39}+\binom{40}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{38}$$
$$= 1\times1\cdot(1-p)^{40}+40\cdot p^1\cdot(1-p)^{39}+780\cdot p^2\cdot(1-p)^{38}$$
$$= (1-p)^{38}\cdot\left[(1-p)^2+40\cdot p\cdot(1-p)+780\cdot p^2\right]$$
$$= (1-p)^{38}\cdot\left(1-2p+p^2+40\cdot p-40\cdot p^2+780\cdot p^2\right)$$
$$= (1-p)^{38}\cdot\left(741\cdot p^2-38\cdot p+1\right)$$

b. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = (1-x)^{38}\quad;\quad v(x) = 741\cdot x^2+38\cdot x+1$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = -38(1-x)^{37}\quad;\quad v'(x) = 1482\cdot x+38$$

La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$= -38\cdot(1-x)^{37}\cdot(741\cdot x^2+38\cdot x+1)+(1-x)^{38}\cdot(1482\cdot x+38)$$
$$= (1-x)^{37}\left[-38\cdot(741\cdot x^2+38\cdot x+1)+(1-x)\cdot(1482\cdot x+38)\right]$$
$$= (1\text{-}x)^{37}(\text{-}28158\cdot x^2\text{-}1444\cdot x\text{-}38+1482\cdot x+38\text{-}1482\cdot x^2\text{-}38\cdot x)$$
$$= -29640\cdot(1-x)^{37}\cdot x^2$$

Sur l'intervalle $[0\,;1]$, la fonction f' est négative, on en déduit que la fonction f est décroissante.

On a les deux valeurs :

- $f(0) = (1-0)^{38}\cdot(741\times0^2+38\times0+1) = 1^{38}\times1 = 1$
- $f(1) = (1-1)^{38}\cdot(741\times1^2+38\times1+1)$
  $= 0^{38}\cdot(741\times1^2+38\times1+1) = 0$

On obtient le tableau de variations :

x	0	1
Variation de f	1 ↘	0

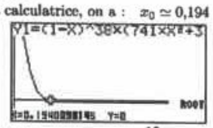
De plus :

- la fonction f est continue sur $[0\,;1]$
- la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;1]$
- le nombre 0,01 est compris entre les images aux bornes de l'intervalle $[0\,;1]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'un seul nombre réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$ tel que :

$$f(x_0) = 0{,}01$$

D'après la calculatrice, on a : $x_0 \simeq 0{,}194$



On en déduit l'encadrement : $\frac{19}{100} < x_0 < \frac{20}{100}$

c. Le fait que Claude ait une probabilité supérieure ou égale à 99 % de subir au moins trois contrôles s'exprime par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant3) \geqslant 0{,}99$$
$$1-\mathcal{P}(\mathcal{X}<3) \geqslant 0{,}99$$
$$1-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant2) \geqslant 0{,}99$$
$$-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant2) \geqslant 0{,}99-1$$
$$-\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant2) \geqslant -0{,}01$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant2) \leqslant 0{,}01$$

logique

D'après la question a. :

$$f(p) \leqslant 0{,}01$$

D'après la question b. :

$$f(p) \leqslant f(x_0)$$

La fonction f étant décroissante :

$$p \geqslant x_0$$

Ainsi, il faut que p soit supérieure ou égale à x_0 pour Claude ait 99 % de subir au moins trois contrôles.

http://chingatome.net