AP M1 Soutien 27/09 CORRECTION
Nombres Complexes (Partie 1)

EXERCICE 1

$z = 2+i$ et $z' = 3-2i$

1) $z+z' = 2+i+3-2i$
$= \underline{5-i}$

2) $zz' = (2+i)(3-2i)$
$= 6-4i+3i-2i^2$
$= 6-i+2$
$= \underline{8-i}$

3) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{2+i}{3-2i} = \dfrac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{6+4i+3i+(2i)^2}{3^2-(2i)^2} = \dfrac{6+7i-2}{9-4i^2} = \dfrac{4+7i}{9+4} = \underline{\dfrac{4}{13}+i\dfrac{7}{13}}$

conjugué

EXERCICE 2 Résoudre

1) $2z+i = 2-i \Leftrightarrow 2z = 2-2i$
$\Leftrightarrow z = \dfrac{2-2i}{2} = 1-i$

2) $3z+1-2i = 4-3i-2z \Leftrightarrow 3z+2z = 4-3i-1+2i$
$\Leftrightarrow 5z = 3-i$
$\Leftrightarrow z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}i$

EXERCICE 3 Résoudre

1) $2z^2+3z-5=0$ $\Delta = 3^2 - 4\times(2)\times(-5) = 49$
$\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles :

$z_1 = \dfrac{-3-7}{4}$ et $z_2 = \dfrac{-3+7}{4}$

$z_1 = -\dfrac{10}{4} = -\dfrac{5}{2}$ et $z_2 = \dfrac{4}{4} = 1$ $\underline{S = \left\{-\dfrac{5}{2}\ ;\ 1\right\}}$.

2) $z^2-3z+\dfrac{9}{4}=0$ $\Delta = (-3)^2-4\times1\times\dfrac{9}{4} = 9-9=0$
$\Delta = 0$ donc l'équation admet une solution réelle :

$z_0 = \dfrac{3}{2}$ $\underline{S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}}$

3) $z^2-4z+8=0$ $\Delta = (-4)^2-4\times1\times8 = 16-32 = -16 = (4i)^2$
$\Delta < 0$; donc l'équation admet 2 solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{4+4i}{2} = 2+2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2-2i$ $\underline{S = \{2+2i\ ;\ 2-2i\}}$

EXERCICE 4

1) On pose $Z = z^2$ donc $z^4 + 2z^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + 2Z - 8 = 0$

$\Delta = 36$ donc l'équation $Z^2 + 2Z - 8 = 0$ a deux solutions réelles :

$Z_1 = \dfrac{-2+6}{2} = 2$ et $Z_2 = \dfrac{-6-2}{2} = -4$

$Z = 2 \Leftrightarrow z^2 = 2 \Leftrightarrow z = \sqrt{2}$ ou $z = -\sqrt{2}$

$Z = -4 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = -2i$

Donc l'équation $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$ admet 4 solutions $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; $2i$ et $-2i$.

2) Pour tout $z \neq 0$ $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{4}{z} + 13 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1 - 4z + 13z^2}{z^2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 4z + 13z^2 = 0.$

$\Leftrightarrow 13z^2 - 4z + 1 = 0.$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 \times 1 = 16 - 52 = -36 < 0$ $\quad \Delta = (6i)^2$

donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{4+6i}{26} = \dfrac{2}{13} + i\dfrac{3}{13}$ et $z_2 = \dfrac{2}{13} - i\dfrac{3}{13}$

Comme $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$; ce sont les solutions de $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{4}{z} + 13 = 0$

EXERCICE 5

a) $(3+5i)z = 1 + iz$

$\Leftrightarrow 3z + 4iz = 1$

$\Leftrightarrow z(3+4i) = 1$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1}{3+4i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3-4i}{3^2 - (4i)^2}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3-4i}{9+16}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$

b) $2 + i\bar{z} = 1 - i$

$i\bar{z} = 1 - i - 2$

$\bar{z} = \dfrac{-1-i}{i}$

$\bar{z} = \dfrac{i(-1-i)}{i^2}$

$\bar{z} = \dfrac{-i-i^2}{-1}$

$\bar{z} = \dfrac{1-i}{-1}$

$\bar{z} = -1 + i$

donc $z = -1 - i$

c) $z + 2\bar{z} = 3 - 4i$ (E)

on a $z = x + iy$

alors : $\bar{z} = x - iy$

$z + 2\bar{z} = x + iy + 2(x - iy)$

$= 3x - iy$

Par unicité de l'écriture sous forme algébrique ; on a :

$3x = 3$ donc $x = 1$

et $-y = -4$ donc $y = 4$

Soit $z = 1 + 4i$