AP TS M2 Une entrée vers le Post BAC : MATRICES 13/09 et 20/09

Séance 1 :

- première définition d'une matrice, taille d'une matrice
- opérations sur les matrices (somme, différence, produit par un réel, produit de 2 matrices, puissances)
- utilisation de la calculatrice.

Séance 2 :

- matrice unité, matrice inverse.
- application à la résolution de systèmes linéaires.

Exercice 1 *(sans calculatrice)*

1. On considère la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de M.

2. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3 et A^4. En déduire les matrices inverses de la matrice A et de la matrice A^3.

3. On considère la matrice $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer par le calcul la matrice inverse de B.

Exercice 2 *(avec calculatrice)*

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Déterminer son inverse.

Exercice 3

Traduire, si possible, chaque système suivant sous forme matricielle.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+\sqrt{2}z=1 \\ \sqrt{2}x-2y+3z=-3 \\ -x+\sqrt{2}y=0 \end{cases}$$

Exercice 4

Dans une entreprise de 60 personnes, le salaire moyen mensuel des ouvriers est de 1500 €, celui des techniciens est de 2600 € et celui des cadres de 4200 €. La masse des salaires versés chaque mois par cette entreprise est de 114 000 €.

Si on augmente de 6,4% le salaire des ouvriers et de 4,5% celui des cadres et techniciens alors la masse des salaires mensuels augmente de 5,6%.

Quel est l'effectif de chaque catégorie de salariés de cette entreprise ?

Exercice 5

Soient A (2; 3) et B (4; 6) deux points du plan muni d'un repère et (AB) : $y = mx + p$, l'équation réduite de la droite (AB).

1. Montrer que m et p sont solutions d'un système.
2. En déduire une équation matricielle équivalente au système.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer alors les valeurs de m et p.

Exercice 6

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
Elle passe par le point A(1 ; 2) et coupe la droite d d'équation $y = -2x + 3$ en deux points d'abscisses respectives -1 et 2.
Déterminer l'équation de la parabole $\mathscr{P}$.

Exercice 7

Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale d'eau en m^3 utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne les résultats suivants :

Nombre de jours écoulés : x_i	1	3	5	8	10
Volume utilisé en m^3 : y_i	2,25	5,3	8	17,5	27

1. Représenter le nuage de points (x_i ; y_i). Unités graphiques : abscisse 1 cm pour un jour ; ordonnée 0,5 cm pour un m^3.

2. Le nuage de points a une allure qui permet d'envisager une modélisation de la consommation par une parabole P qui aurait
pour équation $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels.

(a) Déterminer un système d'équation d'inconnues (a ; b ; c) sachant qu'on veut que la parabole passe par les points
A(1; 2,25), B (5; 8) et C (10; 27).

(b) À l'aide des matrices, résoudre ce système.

(c) Représenter alors cette parabole sur le même graphique. Ce modèle semble-t-il satisfaisant ?

(d) À l'aide de ce modèle, déterminer quelle serait la consommation d'eau pour l'exploitation au bout de 20 jours.