Révisions sur les SUITES

CORRIGÉ

Capacité 1	*Savoir mener un raisonnement par récurrence (voir aussi Chapitre 1).*
Capacité 2	*La suite (u_n) étant croissante et de limite infinie, A étant un réel, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel $u_n > A$.*
Capacité 3	*Démontrer le théorème de comparaison page …* *Démontrer que la suite (q^n) avec $q > 1$ a pour limite $+\infty$.*
Capacité 4	*Étudier la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux suites.*
Capacité 5	*Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique.*
Capacité 6	*Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées.*

QCM Choisir la bonne réponse:

71 Capacité 4 D'après BAC Soit la suite (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+n}$. Cette suite :

a. a pour limite $\frac{1}{n}$
b. a pour limite 0
c. a pour limite 1
d. n'a pas de limite

72 Capacité 4 Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$
b. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = -\infty$
c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = -1$
d. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n^2} = 0$

73 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier.

(A) (u_n) est croissante.
(B) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
(C) $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
(D) (u_n) est géométrique.

Source : ESIEE

74 Capacité 2 Pour obtenir le premier entier n_0 tel que $0{,}9^n < 0{,}01$, on complète la ligne en rouge de l'algorithme par :

a. $0{,}9^n > 0{,}01$
b. $0{,}9^n < 0{,}01$
c. $0{,}9^n \geqslant 0{,}01$
d. $0{,}9^n \leqslant 0{,}01$

VARIABLES :	n entier
INITIALISATION :	n prend la valeur 0
TRAITEMENT :	Tant que … Faire
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

VRAI /FAUX

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

75 Capacité 4 La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{6n+3}{n+4}$ n'a pas de limite.

76 Capacité 4 La suite $\dfrac{n+\sin n}{2n+1}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

77 Capacité 5 La suite (-2^n) diverge vers $-\infty$.

78 Capacité 6 Toute suite croissante négative est convergente.

79 Capacités 1 et 3 Pour tout a réel strictement positif et tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

80 Capacité 5 On pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. La suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

81 Capacité 1 Soit (u_n) la suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, où f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Alors la suite (u_n) est croissante.

***Les exercices 82 et 83** portent sur la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.*

82 Capacité 5 La suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ pour tout n de $\mathbb{N}$, est une suite géométrique qui converge vers 0.

83 Capacité 1 Pour $u_0 \in [0\,;6]$, la suite (u_n) est croissante et majorée par 6.

AP M1 : RÉVISIONS SUR LES SUITES
22/11

EVALUER SES CAPACITÉS

Capacité 1	*Savoir mener un raisonnement par récurrence (voir aussi Chapitre 1).*
Capacité 2	*La suite (u_n) étant croissante et de limite infinie, A étant un réel, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel $u_n > A$.*
Capacité 3	*Démontrer le théorème de comparaison page … Démontrer que la suite (q^n) avec $q > 1$ a pour limite $+\infty$.*
Capacité 4	*Étudier la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient de deux suites.*
Capacité 5	*Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique.*
Capacité 6	*Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées.*

EX 71 (b)

$u_n = \dfrac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (1+n) = +\infty$

$\Big\}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

CAPACITÉ 4

EX 72 (b)

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = -\infty$

(a) → FORME INDÉTERMINÉE $\infty - \infty$

(c) → ______ $\frac{\infty}{\infty}$

(d) → ______ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{\infty}{\infty}$

CAPACITÉ 4

EX 73 (a)

$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

CAPACITÉ 1

on montre par exemple par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$.

- Initialisation $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{1}{2}}$ donc $u_0 < u_1$
- Hérédité

$P(n)$: " $u_{n+1} \leq u_n$ "

soit $n \in \mathbb{N}$ soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $\sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$

donc $u_{n+2} \leq u_{n+1} \Rightarrow (u_n)$ croissante

Astuce : penser à conjecturer la solution à l'aide de la CALCULATRICE pour éliminer des solutions.

EX 74 (c)

premier n_0 tq $0{,}9^n < 0{,}01$ → on exécute la boucle TANT QUE ce n'est pas vérifié

→ TANT QUE $0{,}9^n \geq 0{,}01$

CAPACITÉ 2

EX 75 $u_n = \frac{6n+3}{n+4} = \frac{n(6+\frac{3}{n})}{n(1+\frac{4}{n})} = \frac{6+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 6$.

CAPACITÉ 4

FAUX

$n>0$

Ex 76 Théorème des gendarmes $-1 \leq \sin n \leq 1$

CAPACITÉ 4

VRAI

$\forall n \geq 0$ $n-1 \leq n+\sin n \leq n+1$

$\frac{1}{2n+1} > 0$ donc $\frac{1}{2n+1} \times (n-1) \leq \frac{1}{2n+1} \times (n+\sin n) \leq \frac{1}{2n+1} \times (n+1)$

ie $\frac{n-1}{2n+1} \leq \frac{n+\sin n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+1}$

or $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+\sin n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$

EX 77 $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} (-2^n) = -\infty$.

CAPACITÉ 5

VRAIE

⚠ $-2^n \neq (-2)^n$ (la suite $(-2)^n$ n'a pas de limite)

Ex 78 Toute suite croissante croissante négative est convergente.

CAPACITÉ 6

VRAIE

* comme (u_n) négative : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq 0$ alors (u_n) est majorée par 0

* (u_n) est croissante

Toute suite croissante majorée est convergente.

EX 79 Montrons $P(n)$: $\forall a>0$ $(1+a)^n \geq 1+na$ par récurrence.

CAPACITÉ 1

- Initialisation ; pour $n=0$ $1+a \geq 1$ (car $a>0$)
- Hérédité soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+a)^n \geq 1+na$

  Montrons que $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$

comme $(1+a)^n \geq 1+an$

alors $(1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na)$ (car $1+a>0$)

donc $(1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2$ $(\ast)$

or $1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2$ or $na^2>0$

donc $1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$.

$(\ast)$ devient $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$ CQFD.

EX 80

CAPACITÉ 5

FAUX

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \quad \text{où } q = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

donc $S_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$

$$= 2\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$

EX 81

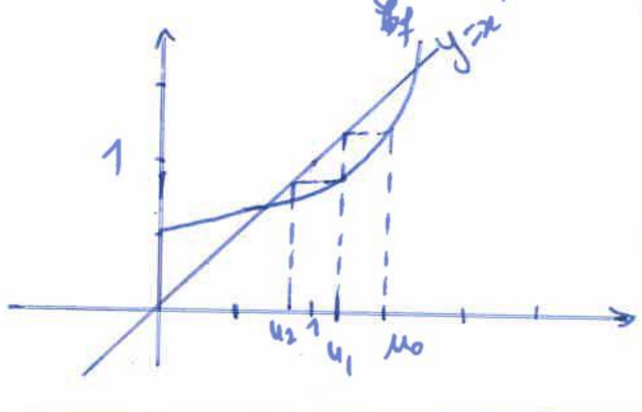
CAPACITÉ 1

FAUX

u_n telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$

Alors la suite (u_n) n'est pas forcément croissante.



$u_1 = f(u_0)$

⚠ f est croissante

mais (u_n) est décroissante.

EX 82

CAPACITÉS

VRAI

(v_n) / $u_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$v_n = u_n - 6$ est géométrique

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}-6}{u_n-6} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 3 - 6}{u_n - 6} = \frac{\frac{1}{2}u_n - 3}{u_n-6}$$

donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\frac{1}{2}(u_n-6)}{u_n-6} = \dfrac{1}{2}$

donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

EXERCICE 83

VRAI

CAPACITÉ 1

$u_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$; $v_0 \leq 0$

donc $u_n \leq 6$

et on démontre que $u_{n+1} \geq u_n$