Révisions sur les complexes

CORRIGÉ

Capacité 1 *Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.*

Capacité 2 *Représenter un nombre complexe par un point, un vecteur. Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.*

~~**Capacité 3** *Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement.*~~ Sera vue plus tard

Capacité 4 *Résoudre une équation du second degré à coefficients réels.*

Capacité 5 *Connaître et utiliser la forme* $z\bar{z} = |z|^2$.

Capacité 6 *Effectuer des opérations sur les complexes écrits sous différentes formes. Démontrer en géométrie.*

QCM Choisir la bonne réponse

138 Capacité 1 Si $z=1+i$ et $z'=3+3i$ alors
a. $zz'=0$ **b.** $z'+\bar{z}=4-2i$ **c.** $zz'=6i$ **d.** $z'\bar{z}=-6$

139 Capacités 3 et 8 On considère trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1+i\sqrt{3}$, $z_B=1+i$ et
$z_C=2i\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.
a. $\arg(z_C)=\frac{\pi}{12}$
b. $\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
c. $\frac{z_A}{z_B}=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$
d. $\frac{z_B}{z_A}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

140 Capacité 2 Dans le plan complexe, on considère les points A d'affixe $a=3-2i$, B d'affixe $b=4+i$, C d'affixes $c=8+12i$ et D d'affixe $d=-1-13i$.
a. $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $-1-3i$.
b. $AB=\sqrt{10}$
c. A, B et C sont alignés
d. ABCD parallélogramme

141 Capacité 4 Soit (E) l'équation : $z^2+2z+5=0$.
a. $1+2i$ est solution de (E).
b. L'équation (E) a deux solutions réelles.
c. L'équation (E) n'a pas de solutions dans C.
d. Le produit des solutions de (E) est égal à 5.

VRAI / FAUX

Réponses page 461

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

142 Capacité 1 $1+i>0$.

143 Capacité 1 Si $z=3+i$ et $z'=1+3i$ on a $zz'=10i$.

144 Capacité 5 Si $z=3+i$ alors $z\bar{z}=8$.

145 Capacités 1 et 6 L'équation $z+2\bar{z}=(1-i)^2$ a pour unique solution $2i$.

[redacted]

147 Capacités 3 et 6 Si $z=\sqrt{3}+i$ alors $|\bar{z}+2i|=4$.

[redacted] $+i)(\sqrt{3}-i)$ est $\frac{\pi}{12}$.

149 Capacité 4 $2-i\sqrt{3}$ est solution de $z^2-4z+7=0$.

150 Capacité 8 Si $|1-z|=1$ alors $z=0$.

151 Capacité 6 Si $|1+iz|=|1-iz|$ alors z est un réel.

152 Capacité 5 Si $z\bar{z}\leqslant 3$ alors le point M d'affixe z appartient à un disque de rayon 3.

153 Capacité 4 Si $z\neq 0$ et $z+\frac{1}{z}=0$ alors $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}$.

154 Capacité 8 Le point M d'affixe $2-i\sqrt{3}$ appartient au cercle de centre A(1 ; 0) et de rayon 2.

155 Capacité 6 Soit A d'affixe $2-5i$ et B d'affixe $7-3i$. Le triangle OAB est isocèle rectangle.

156 Capacité 6 L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-i|=|z+2i|$ est une droite parallèle à l'axe des réels.

AP M1 : RÉVISIONS SUR LES COMPLEXES
22/11

EVALUER SES CAPACITÉS

Capacité 1 Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.

Capacité 2 Représenter un nombre complexe par un point, un vecteur. Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.

~~**Capacité 3** Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement.~~ (→ sera vue plus tard dans l'année)

Capacité 4 Résoudre une équation du second degré à coefficients réels.

Capacité 5 Connaître et utiliser la forme $z\overline{z} = |z|^2$.

Capacité 6 Effectuer des opérations sur les complexes écrits sous différentes formes. Démontrer en géométrie.

EX 138 (c) EX 140 (b) EX 141 (d)

EX 142
CAPACITÉ 1
FAUX

Un nombre complexe non réel n'a pas de signe.

EX 143
CAPACITÉ 1
VRAI

$z = 3+i$ $\quad z' = 1+3i$

$zz' = (3+i)(1+3i)$
$= 3+9i+i-3$
$= 10i$

EX 144
CAPACITÉ 5

$z = 3+i$ alors $z\overline{z} = |z|^2 = 3^2+1^2 = 10$

EX 145
CAPACITÉ 1et6

L'équation $z + 2\overline{z} = (1-i)^2$ (E)

on pose $z = x+iy$ $\quad \overline{z} = x-iy$. ← Méthode très classique pour des équations comportant des z et $\overline{z}$

et $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i$

(E) devient $x+iy+2x-2iy = -2i$

donc $3x - iy = -2i$

ainsi $3x + i(-y+2) = 0$

on a $\begin{cases} 3x = 0 \\ -y+2 = 0 \end{cases}$ soit $x = 0$ et $y = +2$

$z = x+iy = 2i$

Donc la solution de (E) est $z = 2i$.

EX 147

CAPACITÉ 3,7

FAUX

$z = \sqrt{3} + i$ donc $\bar{z} = \sqrt{3} - i$

alors $\bar{z} + 2i = \sqrt{3} - i + 2i = \sqrt{3} + i$

donc $|\bar{z} + 2i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{pmatrix} |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ z = a+ib \end{pmatrix}$

EX 149

CAPACITÉ 4

VRAI

$z^2 - 4z + 7 = 0.$ (E)

$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 7 = 16 - 28 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$

$z_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}i}{2} = \underline{2 + i\sqrt{3}}$

$z_2 = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}i}{2} = \underline{2 - i\sqrt{3}}$

Donc $2 - i\sqrt{3}$ est bien une solution de (E).

EX 150

CAPACITÉ 6

FAUX

Si $|1 - z| = 1$ (E′) soit M un point d'affixe z ; $M(z)$
et A d'affixe 1 ; $A(1)$

alors $|1 - z| = 1 \Leftrightarrow AM = 1$

donc (E′) signifie que z est l'affixe d'un point quelconque du cercle de centre 1 et de centre $A(1)$.

EX 151

CAPACITÉ 6

VRAI

Si $|1 + iz| = |1 - iz|$ (E″) alors $|1 + iz|^2 = |1 - iz|^2$

$\begin{cases} \text{soit } z = x + iy \\ (x;y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$ $\quad |1 + iz|^2 = |1 + ix - y|^2 = (1-y)^2 + x^2$

$|1 - iz|^2 = |1 - ix + y|^2 = (1+y)^2 + x^2$

Ainsi si on a (E″) alors : $(1-y)^2 = (1+y)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1} = \cancel{y^2} + 2y + \cancel{1}$

$\Leftrightarrow 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ donc $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$

Donc z est réel

2/3

Ex 152
CAPACITÉ 5
FAUX

$z\bar{z} = |z|^2$

$|z|^2 \leq 3 \iff |z| \leq \sqrt{3}$

$\iff OM \leq \sqrt{3}$

$\iff$ M(z) appartient au disque de rayon $\sqrt{3}$.

Ex 153
CAPACITÉ 4
FAUX

si $z \neq 0$ et $z + \frac{1}{z} = 0 \iff z^2 + 1 = 0$

$\iff z^2 = -1$

$\iff z = i$ ou $z = -i$

donc $Re(z) = 1$

Ex 154
CAPACITÉ 6
VRAI

$M(2 - i\sqrt{3})$ $A(1)$

$AM^2 = |z_M - z_A|^2$

$= |2 - i\sqrt{3} - 1|^2$

$= |1 - i\sqrt{3}|^2$

$= 1 + 3$

$= 4$

donc $AM = 2$ donc M appartient au cercle de centre $A(1;0)$ et de rayon 2.

Ex 155
CAPACITÉ 6
VRAI

$A(2 - 5i)$
$B(7 - 3i)$

$OA = |2 - 5i| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$OB = |7 - 3i| = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$

$AB = |7 - 3i - (2 - 5i)| = |5 + 2i|$

$= \sqrt{25 + 4}$

$= \sqrt{29}$

Donc $OA = AB$

OAB est isocèle en A.

Ex 156
CAPACITÉ 6
VRAI

$|z - i| = |z + 2i| \iff AM = BM$ avec $A(i)$, $B(-2i)$

$\iff$ M appartient à la médiatrice de [AB]

3/3