AP du 31/01 NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1 Pondichéry 2013

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note i le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
On considère le point A d'affixe $z_\mathrm{A} = 1$ et le point B d'affixe $z_\mathrm{B} = \mathrm{i}$.
À tout point M d'affixe $z_M = x + \mathrm{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -\mathrm{i}z_M$.
On désigne par I le milieu du segment [AM].
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que BM' = 2OI (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   - **a.** Déterminer la forme algébrique de z_M.
   - **b.** Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
     Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
   - **c.** Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
     Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.
   - **a.** Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
   - **b.** Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.
   - **c.** Écrire les coordonnées des points I, B et M'.
   - **d.** Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
   - **e.** Montrer que BM' = 2OI.

EXERCICE 2 TRES CLASSIQUE : TYPE QCM/VRAI FAUX (POLYNESIE/METROPOLE/ASIE 2013)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

   a. $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}$ **b.** $\sqrt{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ **c.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ **d.** $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \overline{z}$, d'inconnue complexe z, admet :
   - **a.** une solution
   - **b.** deux solutions
   - **c.** une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.
   - **d.** une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ est une droite.

2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2\mathrm{i}, \quad b = -\sqrt{3} + \mathrm{i}, \quad c = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad d = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \quad \text{et} \quad e = -1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)\mathrm{i}.$$

1. **Affirmation 1** : les points A, B et C sont alignés.
2. **Affirmation 2** : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

EXERCICE 3 ANTILLES GUYANE juin 2013 (COMPLEXES, SUITES ET ALGO)

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.
2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : A et B des nombres réels
            K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
                 Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
    Affecter à A la valeur (A + √(A² + B²))/3
    Affecter à B la valeur B/3
FinPour
Afficher A
```

   a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

   b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).
3. **a.** On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$\left|z+z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

   Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}| \leqslant \frac{2|z_n|}{3}.$$

   b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

   En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

   c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

CORRIGE

EXERCICE 1 Pondichéry 2013

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

   (a) $z_M = 2\times\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

   (b) $z_{M'} = -iz_M = -i(1-i\sqrt{3}) = -i + i^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} - i$.

   Module et argument méthode algébrique :

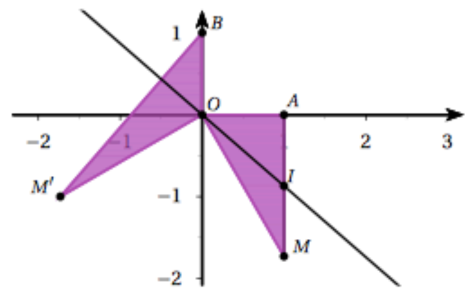
   $|z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ et si l'on nomme θ un argument de $z_{M'}$ alors, par propriété,
   $\begin{cases} \cos\theta &= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ On reconnaît $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$ (modulo 2π).

   Module et argument par la forme exponentielle :

   $|z_{M'}| = |-i| \times |z_M| = 1 \times |2e^{-i\frac{\pi}{3}}| = 2$

   $\arg(z_{M'}) = \arg(-i) + \arg(z_M) = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{5\pi}{6}$ (module 2π).

   (c) La figure n'est pas à l'échelle.
   Graphiquement on vérifie les propriétés 1 et 2.



2. Cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

   (a) $z_I = \dfrac{z_A + z_M}{2} = \dfrac{x+1}{2} + i\,\dfrac{y}{2}$.

   (b) $z_{M'} = -i(x+iy) = y - i\,x$.

   (c) $I\left(\dfrac{x+1}{2}\,;\,\dfrac{y}{2}\right)$, B$(0\,;\,1)$ et $M'(y\,;\,-x)$.

   (d) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BM'} = \left(\dfrac{x+1}{2}\right)\times y + \left(\dfrac{y}{2}\right)\times(-x-1) = \dfrac{xy}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{xy}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$ donc les droites (OI) et (BM') sont perpendiculaires.

   (e) $BM' = \sqrt{y^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ et d'autre part, $2OI = 2\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{2}\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$
   donc

$$2OI = BM'.$$

EXERCICE 2 TRES CLASSIQUE : TYPE QCM/VRAI FAUX (POLYNESIE/ASIE/METROPOLE 2013)

Polynésie

1. **(d)** $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$ **:**
$\left|i\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|i| \times |z_1|}{|z_2|} = \dfrac{1 \times \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$
$\arg\left(i\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(i) + \arg(z_1) - \arg(z_2) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{13\pi}{12}.$
2. **(c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.**
Pour s'en convaincre, écrire les formes algébriques...
$-z = \overline{z} \iff -a - ib = a - ib \iff a = -a \iff a = 0$

Métropole

1. **Vrai :** Si on pose A, le point d'affixe i et B le point d'affixe -1 dans le plan complexe, alors puisque M est le point d'affixe z, on a : $|z - i| = |z_M - z_A| = AM$. De même $|z + 1| = MB$, et donc l'ensemble des points M recherché est l'ensemble des points équidistants de A et de B, c'est à dire la médiatrice du segment $[AB]$, c'est donc bien une droite.

---

2. **Faux :** On remarque que $1 + i\sqrt{3} = 2 \times \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. En utilisant les propriétés des modules et des arguments des nombres complexes, on a : $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4 = 2^4 \times e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Un argument du nombre complexe étudié est donc $\dfrac{4\pi}{3}$ qui n'est congru ni a 0 ni à π modulo 2π, donc le nombre n'est pas réel.

Asie

1. **Affirmation 1** : VRAIE
On a $\overrightarrow{AB}\left(-\sqrt{3} - 2\,;\,-1\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(-1\,;\,\sqrt{3} - 2\right)$.
D'où $\overrightarrow{AC} = \left(2 - \sqrt{3}\right)\overrightarrow{AB}$.
Les vecteurs sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

---

2. **Affirmation 2** : FAUSSE

On calcule successivement :

$\mathrm{EB}^2 = 8$; $\mathrm{EC}^2 = 8$ et $\mathrm{ED}^2 = \dfrac{19}{4} + 2\sqrt{3} \neq 8$.

Les points B, C et D ne sont pas équidistants de E.

EXERCICE 3 ANTILLES GUYANE 2013

1. On a $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$.
2. $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{3} = \dfrac{1 + \mathrm{i} + \sqrt{2}}{3} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}$. On a alors $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.
3. **a.** Pour N = 2, le tableau de l'état des variables dans l'algorithme est :

K	A	B
1	0,8047	0,3333
2	0,5586	0,1111

b. Plus généralement, pour une valeur de N saisie par l'utilisateur, l'algorithme affichera la valeur de a_N.

Partie B

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = a_{n+1} + \mathrm{i}b_{n+1}$ et $z_{n+1} = \dfrac{a_n + \mathrm{i}b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}$, donc :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{3}.$$

2. La suite (b_n) est géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $\frac{1}{3}$, par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on en déduit que (b_n) converge vers 0.

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}| = \left|\dfrac{z_n + |z_n|}{3}\right| = \frac{1}{3}\left|z_n + |z_n|\right| \leqslant \frac{1}{3}\left(|z_n| + |z_n|\right)$, c'est-à-dire : $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{2|z_n|}{3}$.

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$.

- On a $u_0 = |z_0| = \sqrt{2}$ et $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2} = \sqrt{2}$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- Supposons que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$, alors :

$$u_{n+1} = |z_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3} u_n \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2},$$

  la propriété est donc héréditaire.
- La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire à partir de tout rang, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n la propriété est vraie.

On a de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = |z_n| \geqslant 0$, donc : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2} = 0$, le théorème « des gendarmes » permet de conclure que la suite (u_n) converge vers 0.

c. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = |z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{a_n^2} = |a_n|.$$

Ainsi, pour pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |a_n| \leqslant u_n$. Comme (u_n) converge vers 0, le théorème « des gendarmes » permet à nouveau de conclure que $(|a_n|)$ converge vers 0, donc que (a_n) converge vers 0.