AP1 14/03 Révisions type BAC fonctions, suites, intégration

Exercice 1

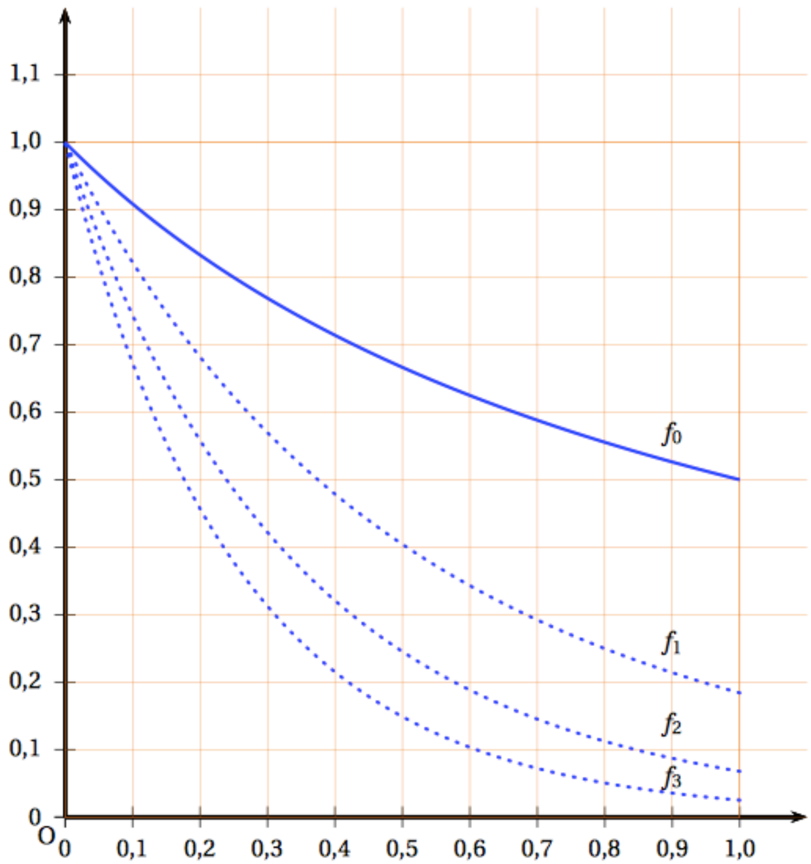
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n :



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

2. a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}.$$

b. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

Exercice 2

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels. u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n. Affecter à u la valeur $u + \dfrac{1}{i}$
Sortie :	Afficher u.

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.
Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie A.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. **a.** Soit k un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0$.

En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).

b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par $1, 2, \ldots, n$ et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geqslant 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

Corrigé

Exercice 1

1. **a.** Les fonctions représentées sont positives ; I_n représente donc l'aire de la surface limitée par le représentation de f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Le dessin suggère que la suite (I_n) est décroissante.

   b. $f_{n+1}(x) = \dfrac{e^{-(n+1)x}}{1+x} = \dfrac{e^{-nx} \times e^{-x}}{1+x} = \dfrac{e^{-nx}}{1+x} \times e^{-x} = f_n(x) \times e^{-x}$.
   Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant -x \leqslant 0 \Rightarrow$ (par croissance de la fonction exponentielle) $e^{-1} \leqslant e^{-x} \leqslant e^{0}$. En multipliant chaque membre de cette dernière inégalité par $f_n(x) > 0$, on obtient :
   $f_n(x) \times e^{-x} \leqslant f_n(x) \times 1$, soit finalement :
   $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.
   Par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ des fonctions continues f_{n+1} et f_n :
   $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) \Rightarrow I_{n+1} \leqslant I_n$: la suite (I_n) est décroissante.

2. **a.** $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant 1 + x \leqslant 2 \iff \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{1}$ et par produit par le nombre positif e^{-nx}, on obtient :
   $\dfrac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}$.
   D'autre part on sait que pour $1 + x \geqslant 1$, on a $(1+x)^2 \geqslant 1 + x \iff$
   $\dfrac{1}{(1+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{1+x}$ et par produit par le nombre positif e^{-nx}, on obtient :
   $\dfrac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \dfrac{e^{-nx}}{1+x}$.
   Enfin il est évident que $\dfrac{e^{-nx}}{(1+x)^2} > 0$, donc finalement :
   $$0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}.$$

   b. Par intégration sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ des inégalités précédentes on obtient
   $\displaystyle\int_0^1 0\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx}\,dx$ soit encore
   $0 \leqslant J_n \leqslant I_n \leqslant \left[-\dfrac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1$ c'est à dire :

   $0 \leqslant J_n \leqslant I_n \leqslant -\dfrac{1}{n}\left(e^{-n} - 1\right)$.

   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\left(e^{-n} - 1\right) = 0$.
   Conclusion d'après le théorème des « gendarmes », les suites (I_n) et (J_n) convergent vers 0.

Exercice 2

Partie A

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. • $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.
   Comme $\lim\limits_{x:\to+\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$, on a donc $\lim\limits_{x:\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x:\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$.
   • On a $\lim\limits_{x:\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, donc finalement par somme de limites : $\lim\limits_{x:\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Comme sur $[1\ ;\ +\infty[$, $x+1>0$, et $\frac{x}{x+1} > 0$ la fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $[1\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{x}{x+1}$.
   Or $u'(x) = \frac{1\times(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$.
   Donc $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x+x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$.
   Comme $x \geqslant 1$, la dérivée est clairement positive, donc la fonction est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ de $f(1) = \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} \approx -0,193$ à 0 sa limite en plus l'infini.
3. Le tableau montre que $f(x) < 0$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots - \ln n.$$

1. L'algorithme donne successivement pour u les valeurs :
   $0+1=1$
   $1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
   $\frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ valeur qu'il affiche.
2. Il suffit de modifier la sortie en : Afficher $u - \ln n$.
3. On peut conjecturer que pour n allant de 4 à 2000 la suite est décroissante et converge vers une valeur proche de 0,577.

Partie C

1. On a $u_{n+1} - u_n = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right] = \frac{1}{n+1} + \ln n -$ $\ln(n+1) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n)$. On a vu que pour $x \geqslant 1$, $f(x) < 0$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ montre que $u_{n+1} < u_n$, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.
2. **a.** Puisqu'on intègre de k strictement positif à $k+1$, on a donc
   $0 < k \leqslant x \leqslant k+1 \iff 0 < \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$
   On a donc en particulier $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k} \iff \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geqslant 0$. L'intégrale sur $[k\ ;\ k+1]$ de la fonction continue et positive est un nombre positif.

- $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \geqslant 0 \iff \int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (par linéarité de l'intégrale.

  Or $\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\times(k+1-k) = \frac{1}{k}$.

  L'inégalité précédente s'écrit donc : $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.

- On a $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1)-\ln k$.

  Donc l'inégalité précédente s'écrit $\ln(k+1)-\ln k \leqslant \frac{1}{k}$ (1)

b. On obtient la suite des inégalités suivante :

$\ln(1+1)-\ln 1 \leqslant \frac{1}{1}$

$\ln(2+1)-\ln 2 \leqslant \frac{1}{2}$

$\ln(3+1)-\ln 3 \leqslant \frac{1}{3}$

....

$\ln(n)-\ln(n-1) \leqslant \frac{1}{n-1}$

$\ln(n+1)-\ln n \leqslant \frac{1}{n}$

D'où par somme membres à membres et effet de « dominos » :

$\ln(n+1)-\ln 1 \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ ou encore

$\ln(n+1) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$

c. La fonction ln étant croissante, on a $\ln n < \ln(n+1)$ et comme $\ln(n+1) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ on en déduit que $\ln n < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \iff 0 < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$, soit finalement $u_n > 0$.

3. On a vu que la suite est décroissante et ensuite qu'elle est minorée par 0 : elle converge donc vers une limite supérieure à zéro.