AP TS du 13/09 M1 Correction

Objectifs : trouver une formule explicite pour une suite

EXERCICE 1 (extrait d'annales Liban Juin 2013 – correction partielle)

1. $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{v_{n+1}-3} - \dfrac{1}{v_n-3} = \dfrac{1}{\frac{9}{6-v_n}-3} - \dfrac{1}{v_n-3} = \dfrac{6-v_n}{3v_n-9} - \dfrac{1}{v_n-3} = \dfrac{6-v_n-3}{3v_n-9} = \dfrac{-v_n+3}{3v_n-9} = -\dfrac{v_n-3}{3(v_n-3)} = -\dfrac{1}{3}$.

   Ainsi la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{3}$.

2. $w_n = w_0 + nr = \dfrac{1}{1-3} - \dfrac{1}{3}n = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}n$.

   Comme $w_n = \dfrac{1}{v_n-3}$, on a $v_n = \dfrac{1}{w_n} + 3 = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}n} + 3 = \dfrac{6}{-3-2n} + 3$.

EXERCICE 2

EXERCICE 2

$u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

1) a) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1}$

$= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

$= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)$

$= \frac{1}{2}v_n$; (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$; $v_n = \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n+2}}$

2) a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$

b) $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$

c) D'où $w_{n+1} = 2 + w_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) (w_n) est donc une suite arithmétique de raison 2 ; $w_0 = -4$

D'où $w_n = -4 + 2n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) on a $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ d'où $u_n = w_n \times v_n$

$u_n = (-4+2n) \times \frac{1}{2^{n+2}}$

$u_n = \frac{-2+n}{2^{n+1}}$

$u_n = \frac{n-2}{2^{n+1}}$

EXERCICE 3 (extrait d'annales Métropole Juin 2013)

1. a. On calcule les premiers termes, par exemple en utilisant le mode récurrence de la calculatrice, et on obtient :

$u_1 = 2 + \frac{1}{3} \approx 2,33$ $\quad\quad u_2 = 2 + \frac{8}{9} \approx 2,89$

$u_3 = 3 + \frac{16}{27} \approx 3,59$ $\quad\quad u_l = 4 + \frac{32}{81} \approx 4,40$

b. On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante. On pourra en tout cas affirmer qu'elle n'est pas décroissante.

2. a. Nous allons procéder par récurrence :

Identification de la propriété : Pour tout entier naturel n, posons la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante : $u_n \leqslant n+3$.

Initialisation : Puisque l'on a $u_0 = 2$ et $0+3 = 3$, on vérifie bien :
$u_0 \leqslant 0+3$: *la propriété $\mathcal{P}_0$ est bien vraie.*

Hérédité : Pour un entier k naturel donné, on suppose la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie.

On a $u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1$.

Par hypothèse de récurrence : $u_k \leqslant k+3$

En multipliant par un nombre positif : $\frac{2}{3}u_k \leqslant \frac{2}{3}(k+3)$

Soit $\frac{2}{3}u_k \leqslant \frac{2}{3}k + 2$

Puis, en ajoutant un même nombre dans chaque membre :

$\frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 \leqslant \frac{2}{3}k + 2 + \frac{1}{3}k + 1$

Ce qui donne : $u_{k+1} \leqslant k+3 \leqslant k+4$. On a donc $u_{k+1} \leqslant (k+1)+3$, c'est à dire que la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Nous avons donc démontré le caractère héréditaire de la véracité des propriétés $\mathcal{P}_n$.

Conclusion : Puisque la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie et que nous avons prouvé l'hérédité, on peut en déduire que pour tout entier naturel n, on a $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est à dire que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n \leqslant n+3$.

b. $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3}$

On a donc bien $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} \times (-u_n + n + 3) = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$. Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leqslant n+3$ ce qui équivaut à dire que la différence $n+3-u_n$ est positive, et elle le reste en étant multipliée par $\frac{1}{3}$, donc la différence entre deux termes consécutifs étant positive, on confirme bien que notre conjecture était correcte : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante, dès le rang 0.

3. a. Exprimons, pour un entier n naturel quelconque, v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$$

Donc $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.

La relation de récurrence obtenue confirme que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

b. On peut donc en déduire une expression explicite du terme général de la suite v : $v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Enfin, puisque l'on a, pour tout n, $v_n = u_n - n$, on en déduit :
$u_n = v_n + n$, et donc on aboutit bien à l'expression demandée :
$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.