AP M1 20sept SUITES

Objectif : étude du comportement global d'une suite

- Obtenir une formule explicite d'une suite par une suite auxiliaire.
- Raisonnement par récurrence.
- Variations d'une suite.
- Manipulation d'inégalités.

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et telle que :
$u_{n+1} = 5u_n + 8$ pour tout entier naturel n.
On propose 2 méthodes indépendantes différentes pour obtenir l'expression de u_n en fonction de n.

Méthode 1 : on introduit une suite auxiliaire v_n qui est soit arithmétique, soit géométrique
On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 2$ pour tout entier naturel n.

a) Déterminer la nature de la suite (v_n).
b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Méthode 2 : on raisonne par récurrence sur l'entier n.
Montrer par récurrence que $u_n = 3\times5^n - 2$ pour tout entier naturel n.

EXERCICE 2 (extrait Amérique du Sud 2014)

NB : à cette étape du cours, on conjecturera seulement le sens de variation dans Partie A, question3.

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :
$v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).